*Практическая работа 1*.

***«****Ознакомление с пакетом Octave. Применение метода Монте-Карло для нахождения оценок объемов и интегралов.»*

Работа выполняется индивидуально согласно вариантам, распределенным в начале семестра.

Цель работы:

1. ознакомиться с пакетом Octave (Matlab). Часто применяемыми для задач математической статистики и различных ее приложений (экономика, эконометрия, финансы…);

2. научиться использовать вероятностные методы в некоторых

вычислительных задачах;

3. научиться применять метод Монте-Карло для оценок вероятностей и моментов в различных задачах.

Практическое задание

Методом Монте-Карло оценить объем части тела {��(��̅) ≤ ��}, заключённой в k мерном кубе с ребром [0, 1]. Функция имеет вид ��(��̅) = ��(��1) + ��(��2) + ⋯ + ��(����). Для выбранной надежности �� ≥ 0.95 указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объёма. Используя объем выборки n=104 и n=106оценить скорость сходимости и показать, что доверительные интервалы пересекаются.

Аналогично построить оценку интегралов (представить интеграл как математическое ожидание функции, зависящей от случайной величины с известной плотностью) и для выбранной надежности �� ≥ 0.95 указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения интеграла.

Вариант 1

1. ��(��) = ��3; 2. k = 6; 3. c = 1,4.

Аналогично построить оценку интегралов (представить интеграл как математическое ожидание функции, зависящей от случайной величины с известной плотностью) и для выбранной надежности �� ≥ 0.95 указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения интеграла.

2 b) ∫ cos(��) exp (−(��+3)2

5

a) ∫ ln(1 + ��2) ����,

Ход работы:

∞

−∞

4)����.

1. Ознакомится с пакетом Octave используя предоставленные материалы и рекомендованную литературу;

2. изучить методы решения предложенной задачи, используя методические указания к работе и материал лекционных и практических занятий;

3. применить полученные знания к решению предложенных задач;

4. сформировать отчет по практической работе.

*Практическая работа 2.. «Эмпирическая функция распределения. Поведение в точке»*

Цель работы:

1. ознакомиться с определением ЭФР и ее поведением при

фиксированном значении аргумента;

2. аналитически и графически оценить надежность асимптотического интервала;

3. убедиться в том, что асимптотические методы работают при конечном объеме выборки.

Задание и ход работы.

1. Выбрать параметры двух из трех распределений генеральной совокупности *X:* ��~��(��, ��), ��~��������или ��~��(��, ��2).

2. Выбрать такую точку *t*0, что 0.05 < ����(��0) < 0.95. Вычислить ����(��0). 3. Смоделировать m=102выборок объема n=104 для каждого из двух выбранных распределений. Для каждой выборки построить ����(��0) − значение эмпирической функции распределения в точке *t*0 -- оценку значения функции распределения в точке *t*0, то есть величины ����(��0). Для каждого из распределений получите 100 оценок величины ����(��0).

4. Значение функции распределения ����(��0) = ��(�� ∈ (−∞,��0) = ∆) является вероятностью события �� = {�� ∈ (−∞,��0)}. Значение эмпирической функции распределения ����(��0) −оценка вероятности события �� = {�� ∈ (−∞,��0)}, то есть k(∆)/n - частота попадания значения случайной величины *X* в интервал ∆. Частота, полученная по серии независимых однотипных испытаний с двумя исходами – �� и ��̅, является состоятельной, несмещенной, асимптотически нормальной оценкой вероятности события. Свойство асимптотической нормальности позволяет строить асимптотический доверительный интервал надежности ��. Фиксировать �� > 0.9 и построить по 100 асимптотических доверительных интервалов надежности �� для значения ����(��0) каждого из выбранных распределений.

5. Построить 2 графика – по оси x - номер выборки, по оси y – соответствующие левый и правый концы асимптотических доверительных интервалов и значение ����(��0).

6. Найти количество ���� асимптотических доверительных интервалов, в которые значение ����(��0) не попало. Сравнить среднее количество ���� для к =100 серий

(mean(����)) с величиной 1- �� (���� можно рассматривать как оценку величины 1- ��) для различных �� = 0.9, 0.91, … , 0.99. Составить таблицу результатов.

*Практическая работа 3. «Эмпирическая функция распределения. Поведение в «целом»*

Цель работы:

1. ознакомится с методами и результатами оценивания функции при помощи расстояний Колмогорова и Смирнова;

2. ознакомится теоретически и практически с построением доверительной полосы;

3. научить использовать критерии согласия и исследовать их свойства при конечном n.

Задание и ход работы

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (*a*,*σ*2) , выполнить следующие действия.

1. Задать параметры распределения ��~��(��, ��2).

2. Построить график *FX* (*x*), используя функцию normcdf.

3. При n=100 построить выборку из генеральной совокупности *X.*

4. По построенной выборке построить график эмпирической функции распределения *Fn* (*x*), используя при построении встроенную функцию [a,b]=stairs(x,y) для построения кусочно постоянной функции. Учесть при построении, что *Fn* (*x*) изменяется на 1/n в каждой следующей точке выборки.

5. Построить доверительную полосу надежности *γ* =0.95; u(*γ*)=1.36.

6. На этом же графике построить *Fn* (*x*) и *FX* (*x*). Убедится, что функция распределения попадает (?) в доверительную полосу.

7. На основе критерия Колмогорова и на основе критерия Смирнова провести проверку гипотез согласия с фиксированной функцией распределения при n=104 и n=106.

8. Оценить ошибки I и II рода каждого из критериев.

Аналогично для ��~��(��, ��) равномерно распределенной на [��, ��] случайной величины.

*Практическая работа 4.. « Гистограмма как оценка плотности»*

Цель работы:

1. ознакомиться с определением гистограммы и ее поведением при

фиксированном значении аргумента;

2. научиться находить значения гистограммы, строить ее

график одновременно (в качестве тестового задания) с реальной плотностью генеральной совокупности;

3. убедиться в том, что асимптотические методы работают при конечном

объеме выборки при корректном (с дополнительными требованиями) их

использовании.

Задание и ход работы

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами (*a*,*σ*2) , выполнить следующие действия.

1. Задать параметры распределения ��~��(��, ��2).

2. Построить график *fX* (*x*), используя функцию normpdf.

3. При n=10^6 построить выборку из генеральной совокупности *X.*

4. По построенной выборке вычислить значения и построить график

гистограммы, используя при построении встроенную функцию

[a,b]=stairs(x,y) для построения кусочно-постоянной функции.

5. Совместить графики плотности и гистограммы на одном рисунке

6. На основе хи-квадрат критерия Пирсона провести проверку гипотез

согласия с семейством распределения генеральной совокупности

7. Оценить ошибки I и II рода критерия.

Сравнить с аналогичной обработкой выборки из равномерного распределения.

*Практическая работа 5. «Линейные статистические модели или модели регрессии»*

Цель работы:

1. ознакомление с линейными статистическими моделями;

2. ознакомится с встроенным в пакет при помощи функций polyfit, polyval матричным методом;

3. убедиться в том, что матричный метод в координатной форме приводит к задачам регрессии.

Задание и ход работы

Построить по соответствующим варианту данным квадратичный P2 и линейный P1 многочлены на промежутке delta= [xmin, xmax]. Добавить к значениям многочлена n независимых значений случайной величины Z~N(0,s^2). Выбрать на промежутке delta n точек: b1=xmin, b2=xmin+h, b3=xmin+2h,..., bn=xmax; h=(xmax-xmin)/(n-1). Найти в этих точках значения зашумленных многочленов (Y). По этим исходным данным оценить коэффициенты исходных многочленов P2 и P1 и значения X=Y-Z (с получением оценки значений - Yn) матричным методом и через функции Matlab или Octave: polyfit, polyval для квадратичного многочлена. Для линейного многочлена использовать также уравнение выборочной линейной регрессии. Проверить ортогональность Yn-Y и Yn (проецирующего вектора и проекции). Найти оценку уровня шума s. В качестве результата вывести исходные данные и все возможные их оценки. Привести графики исходных многочленов и полученных оценок (значения многочленов в выбранных точках, полученные различными методами должны совпасть).

Конкретный вариант

Смоделировать выборку значений линейной или квадратичной функции в нормальном шуме: �� = 3,1�� + 2,4, �� ∈ (−1,5), �� = 2,2��2 + 1,8�� + �� = 1,4, �� = 80,

где σ – уровень шума, систематическая ошибка отсутствует; m – количество точек измерения функции, зашумленной нормальным шумом с уровнем σ (точки измерения дискретно равномерно распределены на (-1, 5)). Используя модели линейной и квадратичной простой регрессии оценить коэффициенты линейной или квадратичной зависимости, построить оценку уровня шума, проверить ортогональность «остатка» и базисов соответствующих линейных пространств.

Ход работы:

1. изучить линейную статистическую модель и модель простой регрессии, используя лекционный материал и рекомендованную литературу;

2. изучить методы решения предложенной задачи, используя методические указания к работе и материал лекционных и практических занятий;

3. применить полученные знания к решению предложенных задач;

4. сформировать отчет по практической работе.